Л.Л.Панченко
Національний педагогічний університет
імені М.П.Драгоманова

Інформаційно-комунікаційні технології в навчанні математичного моделювання майбутніх вчителів математики

Сучасне суспільство з високорозвиненими комп’ютерними та інформаційними технологіями ставить перед системою освіти нові завдання, пов’язані з виробленням педагогічної стратегії в умовах масової комп’ютеризації і інформатизації всіх сторін життя. Особлива роль тут відводиться вищій педагогічній школі, оскільки саме вона покликана підготувати педагогічні кадри для загальноосвітньої, професійної і вищої школи на рівні сучасних вимог суспільства. Основна її мета полягає в підготовці вчителя математики, здатного забезпечити всебічний розвиток особистості учня, формування її розумових, естетичних здібностей, високих моральних якостей.

Математика є основою вивчення фізики, хімії, астрономії, біології, загальнотехнічних і спеціальних дисциплін, є мовою техніки. Математичне моделювання широко використовується для розв’язування практичних завдань різних галузей науки, економіки та виробництва. Тому навчання математичного моделювання майбутніх вчителів математики повинне зайняти належне місце в системі їх вузівської математичної та педагогічної освіти. Вперше цю думку висловив видатний вчений-математик Б.В.Гнеденко [4]. На необхідність навчання математичного моделювання студентів вузів, учнів загальноосвітніх шкіл неодноразово вказували А.М.Колмогроров, А.М.Тихонов, А.О.Самарський. Це стверджується і в "Галузевих стандартах вищої освіти. Математика" [1]. В додатку А перераховано основні вміння математичного моделювання, які повинні набути майбутні вчителі під час навчання в університеті. Серед умінь "математичного моделювання", перерахованих в цьому державному документі, важливе місце займають “вміння створювати та досліджувати математичні моделі з використанням засобів комп'ютерної техніки:

–вміти добирати ефективні методи чисельного аналізу математичних моделей різних задач;

–вміти добирати та використовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм) для символьно-формульного, графічного, чисельного аналізу математичних моделей реальних об'єктів;

–вміти при необхідності розробити алгоритм і програму для розв'язування математичної задачі, яка є математичною моделлю певного процесу чи явища;

–вміти виконувати чисельний експеримент, в тому числі з використанням комп'ютера;

–вміти аналізувати похибки при чисельному розв'язуванні задач;

–вміти інтерпретувати, аналізувати та узагальнювати результати розрахунків чисельного експерименту” [1].

Формування вмінь математичного моделювання, перерахованих вище, — спільне завдання навчання всіх математичних дисциплін та інформатики. Саме в процесі вивчення інформатики студенти набувають вмінь, що є базовими для навчання математичного моделювання і комп'ютерної підтримки цього процесу.

На жаль, сьогодні відсутня науково обґрунтована методична система навчання математичного моделювання майбутніх вчителів математики.

Навчання математичного моделювання майбутніх вчителів математики здійснюється переважно через систему прикладних задач, яка складається з підсистем задач практичного змісту, дібраних в межах кожної математичної дисципліни, що вивчається. В процесі розв'язування цих задач майбутні вчителі оволодівають евристичною схемою діяльності математичного моделювання, яка є послідовністю розумових дій аналізу, синтезу, порівняння та абстрагування направлених на побудову та дослідження математичних моделей, їх реалізацію математичними методами та інтерпретацію в образах вихідної ситуації.

В процесі оволодіння методом математичного моделювання як методом пізнання доцільно організовувати діяльність математичного моделювання для студентів спочатку за *спрощеною* евристичною схемою, яка включає в себе слідуючу послідовність дій, які фактично і становлять операційний склад діяльності "математичне моделювання":

1) попередній аналіз об'єкту дослідження;
2) побудова моделі;
3) реалізація моделі математичними методами;
4) аналіз одержаних результатів та їх перенесення на образ, що вивчається.

Згодом, коли рівень складності матеріалу, що вивчається під час опанування студентами математичних дисциплін зростає, слід розширювати спрощену схему до наступної евристичної схеми діяльності математичного моделювання (її будемо називати *розширеною*):

1) попередній аналіз об'єкту дослідження;
2) побудова математичної моделі;
3) реалізація моделі математичними методами;
4) вибір (чи розробка) алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері;
5) створення програм, що описують модель та алгоритм комп'ютерною мовою;
6) проведення обчислювального експерименту;
7) аналіз результатів та вдосконалення моделі [5].

Діяльність за розширеною евристичною схемою математичного моделювання та засвоєння її студентами в цілому краще всього організовувати на спецкурсах, таких як, наприклад, "Математичне моделювання в курсі вищої математики", "Математичне моделювання геометричними методами"; "Математичне моделювання деяких економічних та фізичних процесів". Такі спецкурси проводять в НПУ імені М.П.Драгоманова на 4-му та 5-му курсах, тому що саме тоді у майбутніх вчителів є всі необхідні знання та вміння, здобуті в процесі вивчення математичних дисциплін та інформатики, які забезпечують свідоме оволодіння методом математичного моделювання не тільки як методом учбового пізнання, а також як методом наукового пізнання.

Перехід від спрощеної схеми діяльності математичного моделювання до розширеної слід здійснювати поступово. Так уже на першому курсі під час вивчення математичного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії доцільно розв'язувати прикладні задачі за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, яка розширюється введенням слідуючого етапу "реалізація математичної моделі комп'ютерними засобами сучасних інформаційних технологій". Це розширення слід виконувати після етапу "реалізація моделі математичними методами" або замість нього.

На цьому етапі передбачається використання комп'ютерних педагогічних програмних засобів (ППЗ) типу DERIVE, EVREKA, GRAN1, GRAN-2D та GRAN-3D, Maple, MathCAD, Mathematika, Mathlab. Від студента вимагається вміння працювати з комп'ютером на рівні користувача, що цілком відповідає рівню випускника загальноосвітньої школи.

Наведемо приклади задач, які розв'язуються за допомогою математичного моделювання і для розв'язування яких доцільно використовувати ППЗ.

Задача 1. *На шкільному подвір'ї треба обгородити квітник прямокутної форми, що прилягає до паркана, довжина якого понад 50 м. Є 200 плит, кожна з яких має довжину 50 см і ширину 50 см. Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою? [3]*

І. Попередній аналіз об'єкту дослідження.

Площу квітника слід подати як функцію від незалежних змінних, якими є розміри паркана. Дослідивши таку функцію на максимум, знайдемо розміри паркана.

ІІ. Побудова математичної моделі.

Позначимо через y ту сторону прямокутника, яка паралельна паркану, а іншу — через x. Тоді площа прямокутника $S = xy$. За умовою довжина огорожі становить $200 \cdot 0{,}5 = 100$ м. Тоді $y + 2x = 100$, звідки $y = 100 - 2x$ і $S = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$, де $0 \le x \le 50$. Отже треба знайти найбільше значення функції $S = 100x - 2x^2$ на відрізку [0; 50].

Далі у розв'язуванні задачі можна піти двома шляхами:

1) знайти найбільше значення функції $S(x)$ на відрізку [0; 50] за методами математичного аналізу;

2) використати ППЗ GRAN1. За допомогою послуг цієї програми побудувати графік залежності $S = f(x)$ при $x \in [a; b]$ і далі скориставшись послугою "координати" пункту "Графік", визначити координати найвищої точки на графіку [2].

Перший шлях розв'язування задачі забезпечується виконанням етапу "реалізація моделі математичними методами" евристичної схеми діяльності математичного моделювання.

Для розв'язування задачі другим шляхом цей етап слід замінити на такий: "дослідження математичної моделі комп'ютерними засобами сучасних інформаційних технологій".

Доцільним є другий шлях розв'язування, тому в евристичній схемі діяльності третім є слідуючий етап.

III. Реалізація математичної моделі комп'ютерними засобами сучасних інформаційних технологій.

За допомогою послуг програми GRAN1 будуємо графік залежності

$$S = 100x - 2x^2 \text{ на відрізку } [0; 50]$$

і визначивши координати найвищої точки на графіку, одержимо $x = 25$, $S = 1250$. (Рис. 2.)Далі будуємо графік $y = 100 - 2x$, і скориставшись послугою "координати" пункту "Графік" знаходимо: при $x = 25$, $y = 50$ (рис. 3).

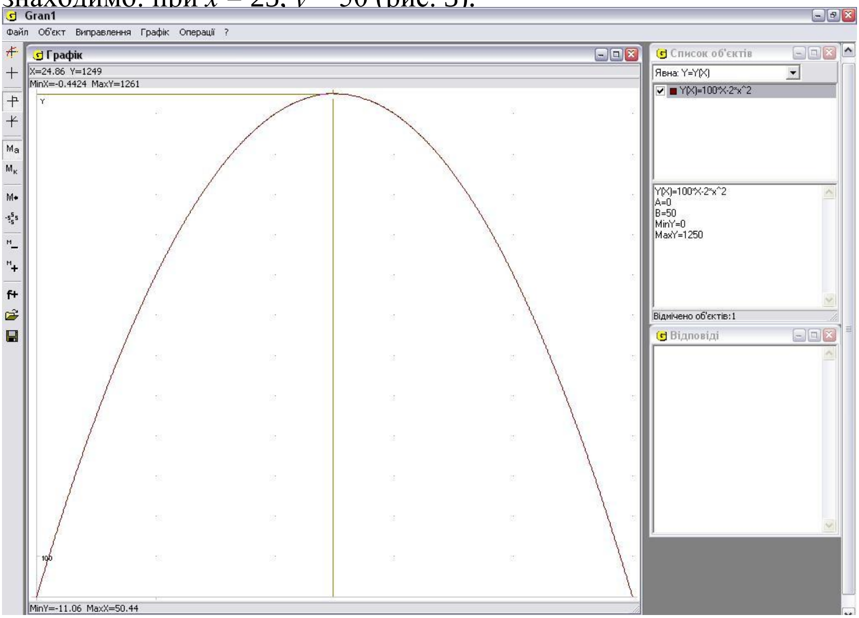


Рис. 2. Графік функції $S(x) = 100x - 2x^2$.

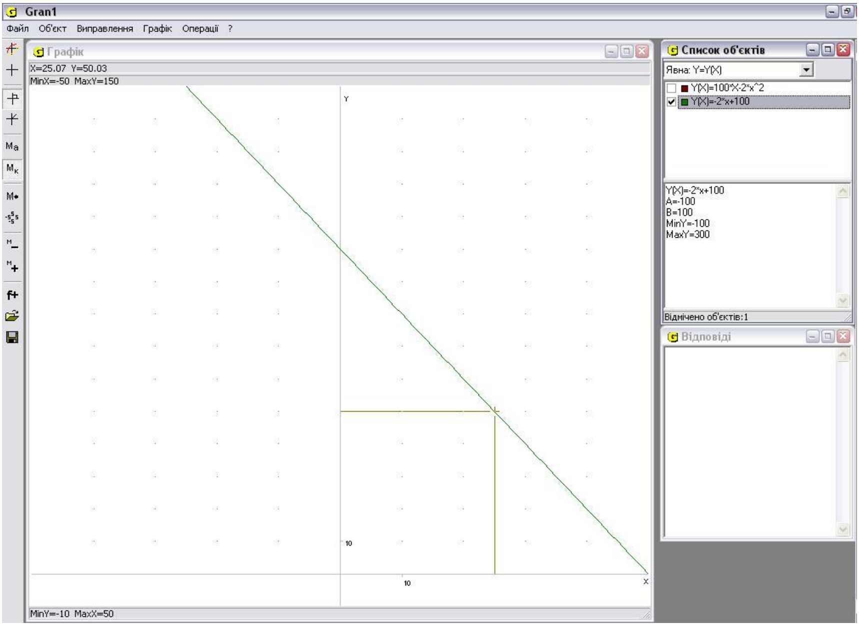


Рис.3. Графік функції $y + 2x = 100$.

IV. Аналіз одержаних результатів та їх перенесення на образ, що вивчається.

Найбільшого значення функція набуває в стаціонарній точці $x = 25$, при цьому $y = 50$.

Отже, квітник матиме найбільшу площу, якщо сторона, паралельна паркану, є вдвічі більшою за іншу.

Цю задачу вказаним шляхом цілком можна розв'язати і в шкільному курсі алгебри і початків аналізу. Розв'язуючи подібні задачі, студентів слід орієнтувати на використання обох шляхів реалізації третього етапу евристичної схеми діяльності математичного моделювання. Тут необхідно формувати у студентів вміння самостійного доцільного вибору евристичної схеми математичного моделювання.

При розв'язуванні задач такого типу окрім інших вмінь математичного моделювання, передбачених галузевим стандартом і не пов'язаних з використанням ІКТ, формується вміння "добирати та використовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм) для символьно-формульного, графічного, чисельного аналізу математичних моделей реальних об'єктів [1]".

Формування інших вмінь створювати та досліджувати математичні моделі з використанням комп'ютерної техніки відбувається при вивченні майбутніми вчителями спецкурсів з математичного моделювання. На цих спецкурсах розглядаються задачі — проблеми з різних галузей людської діяльності, економіки, біології, техніки. Такі задачі розв'язуються за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

Наведемо приклади таких задач-проблеми.

Задача 2. *При проектуванні електричних машин дуже важливо вибрати вдалу схему охолодження. Досить ефективним на сьогоднішній день є локальне охолодження деталей. Більшість деталей мають форму циліндра. В залежності від конструкції машини та взаємодії її вузлів, деталі циліндричної форми доцільно охолоджувати такими зонами: кільцевою зоною з торця, аксіальною зоною на його бічній поверхні; зоною вздовж твірної на бічній поверхні. Знайти найменше, найбільше та середнє значення температури при охолодженні деталі циліндричної форми зоною вздовж твірної на бічній поверхні, вважаючи, що λ-коефіцієнт теплопровідності матеріалу, з якого виготовлено циліндр, α – коефіцієнт тепловіддачі, q — густина теплових джерел, розташованих в циліндрі, є сталими.*

І. Попередній аналіз об'єкту дослідження

З курсу фізики відомо, що існують три способи перенесення тепла: теплопровідність (кондукція), перемішування (конвенція) і випромінювання (радіація). В задачі, що розглядається, перенесення тепла відбувається кондуктивно. Ще в середині XVIII віку М.В.Ломоносов вказав, що кількість теплоти, що передається від одного тіла до другого, пропорційна різниці кількості руху складаючих ці тіла "частинок", тобто молекул.

Кількість руху, що передається молекулам, пропорційна різниці їх кінетичних енергій в областях тіла, що розглядаються, тобто пропорційна різниці температур цих областей. Формально в математичну фізику це положення було введено на початку XIX століття у вигляді гіпотези Біо-Фур'є про пряму пропорційність вектора теплового потоку градієнту температури:

$$q = -\lambda \, grad \, T \qquad (1)$$

Знак "мінус" показує взаємообернені напрями вектора теплового потоку q і градієнта температури ($grad\ T$), а множник пропорційності λ розглядається як деяка фізична характеристика, що називається коефіцієнтом теплопровідності.

При побудові математичної моделі задачі, що розглядається слід врахувати такі припущення:

1) охолодження поверхні відбувається відповідно до закону Ньютона

$$-\lambda \frac{dT}{dn}\bigg|_{s_1} = \alpha(T - T_0), \text{ де}$$

$T(x, y, z)$ — температура елемента, S_1 — поверхня, що охолоджується, n — напрям зовнішньої нормалі до поверхні S_1, α — коефіцієнт теплопровідності матеріалу, з якого виготовлено елемент; k — коефіцієнт тепловіддачі.

2) на теплоізольованій частині S_2 межової поверхні $S = S_1 + S_2$ області D виконується умова

$$\left.\frac{dT}{dn}\right|_{s_2} = 0 .$$

Будемо вважати, що деталь циліндричної форми — скінченний циліндр з радіусом основи R та висотою l. Розглядатимемо цей циліндр відносно деякої циліндричної системи координат (Рис. 1).

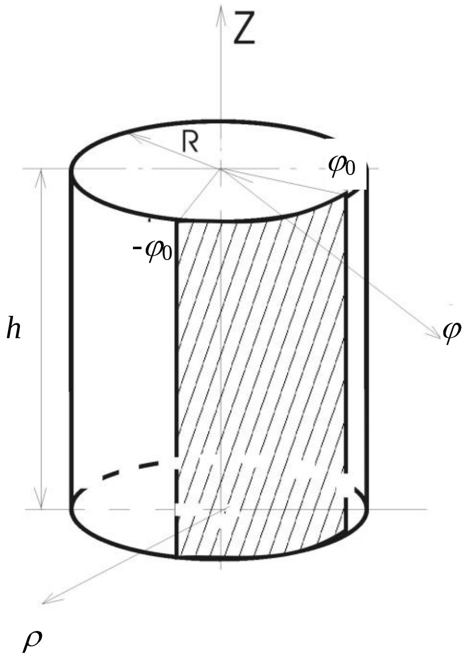


Рис.1. Циліндр з вказаною зоною охолодження між двома твірними на бічній поверхні.

Тоді співвідношення (1) запишеться у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q}{\lambda}=0 , \qquad (2)$$

яке і слід розв'язати, враховуючи характер охолодження, щоб знайти шукану в задачі температуру.

II. Побудова математичної моделі.

З аналізу явища слідує, що температура циліндра T задовольняє рівнянню (2). Враховуючи, що охолодження циліндра відбувається за законом Ньютона крайові умови при охолодженні зоною між двома твірними на поверхні циліндра матимуть слідуючий вигляд:

$$1.\ \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{\substack{z=0,\\ z=h}}, \tag{3}$$

$$2.\ \lambda\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\alpha\chi(-\varphi_0, \varphi_0, \varphi)(T_0 - T)\Big|_{\rho = R}, \tag{4}$$

де $\chi(-\varphi_0,\ \varphi_0,\ \varphi) = \begin{cases} 1,\ якщо\ \varphi \in [-\varphi_0,\ \varphi_0] \\ 0,\ якщо\ \varphi \notin [-\varphi_0,\ \varphi_0] \end{cases}.$

Формули (2) — (4) можна спростити, ввівши заміну змінних

$$\rho = R\xi, z = R\varsigma, T = \frac{R^2 qt}{\lambda} + T_0, k = \frac{R\alpha}{\lambda}.$$

Замість рівняння (2) матимемо рівняння:

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial t}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial\varsigma^2} + 1 = 0 \tag{5}$$

і відповідного межові умови.

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\varsigma}\right|_{\substack{\varsigma=0\\ \varsigma=h}} = 0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = -k\chi(-\varphi_0, \varphi_0, \varphi)t\big|_{\xi=1} \tag{7}$$

Відповідно до межових умов (6) та (7) розв’язок рівняння (5) не залежить від аргументу ς, і тому функція t задовольняє рівняння:

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial t}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2} + 1 = 0. \tag{8}$$

і межовим умовам

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = -k\chi(-\varphi_0, \varphi_0, \varphi)t\big|_{\xi=1}. \tag{9}$$

Рівняння (8) з межовими умовами (9) і є математичною моделлю задачі локального охолодження зоною між двома твірними на бічній поверхні циліндра.

III. Реалізація моделі математичними методами.

Розв’яжемо рівняння (8) з межовими умовами (9). Розв’язок його шукатимемо у вигляді:

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \cos n\varphi. \tag{10}$$

Підставимо співвідношення (10) в рівняння (8). Матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dt_n}{d\xi}\right) - \frac{n^2}{\xi^2}t_n\right)\cos n\varphi + 1 = 0. \tag{11}$$

Помножимо рівняння (11) на $\cos m\varphi$ і проінтегруємо на відрізку $[-\pi;\pi]$. Дістанемо

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dt_0}{d\xi}\right)+1=0 \quad \text{, якщо } m=0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dt_m}{d\xi}\right)-\frac{m^2}{\xi^2}t_m=0 \text{, якщо } m\neq 0.$$

Розв'язок першого з цих рівнянь має вигляд:

$$t_0=-\frac{1}{4}\xi^2+C_0. \tag{13}$$

Для розв'язування другого рівняння застосуємо підстановку $\tau=\ln\xi$. Враховуючи обмеженість розв'язку, дістанемо:

$$t_n=C_n\xi^n. \tag{14}$$

З рівностей (13), (14) маємо розв'язок рівняння (11):

$$t=-\frac{1}{4}\xi^2+C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\xi^n\cos n\varphi. \tag{15}$$

Величини C_n з рівності (15) можна визначити слідуючим способом.

В зоні охолодження функцію $\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}$ покладемо рівною її наближеному значенню:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}=\left.\left(\left(-\frac{\pi}{2\varphi_0}+a\cos\left(\frac{\pi}{\varphi_0}\varphi\right)\chi(-\varphi_0,\varphi_0,\varphi)\right)\right)\right|_{\xi=1} \tag{16}$$

і далі розкладемо цю функцію в ряд Фур'є в інтервалі $[-\pi;\pi]$.

Порівнюючи значення $\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}$ з формули (16) та $\left.\frac{\partial t}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}=\left.\left(-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n n\cos n\varphi\right)\right|_{\xi=1}$, одержимо

$$C_n=-\frac{\sin n\varphi_0}{n^2\varphi_0}-\frac{2a}{\pi}\frac{\sin n\varphi_0}{\frac{\pi^2}{\varphi_0^2}-n^2}, \tag{17}$$

$$C_n=\frac{\pi}{2\varphi_0 k}+\frac{a}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi_0}{n^2\varphi_0}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi_0}{\frac{\pi^2}{\varphi_0^2}-n^2}-\frac{k}{4}, \tag{18}$$

де

$$a=\frac{\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi_0}{n^2\varphi_0}\left(1-\cos\left(n\frac{\pi}{18}\right)\right)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi_0}{\frac{\pi^2}{\varphi^2}-n^2{}_0}\left(\cos n\left(\frac{\pi}{18}\right)-1\right)+1-\cos\frac{\pi}{\varphi_0}\left(\frac{\pi}{18}\right)}. \qquad (19)$$

Нарешті, враховуючи значення (17) та (18) і співвідношення (15), остаточно матимемо

$$t=-\frac{1}{4}+C_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi_0}{n^2\varphi_0}\cos n\varphi-\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi_0}{\frac{\pi^2}{\varphi_0^2}-n^2}\cos n\varphi. \qquad (20)$$

IV. Розробка алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері.

Алгоритм обчислення температури реалізується у вигляді слідуючої послідовності кроків.

1. Ввести значення сталих величин:

– радіус циліндра R у (см);

– висота циліндра h у (см);

– кут розкриття зони охолодження на бічній поверхні φ_0 у град.;

– кількість точок радіальної координати — nr_0;

– густина внутрішніх втрат q;

– коефіцієнт теплопровідності λ;

– коефіцієнт тепловіддачі α;

– температура охолоджувача T_0;

– кількість членів ряду розкладу температури за методом Фур'є;

– похибка розрахунків для С0 та Сп.

2. Обчислити a за формулою (19).

3. Обчислити C_0 за формулою (18).

4. Обчислити $k=\frac{R\alpha}{\lambda}$ та C_n за формулою (17).

5. Обчислити t за формулою (20).

6. Обчислити T за формулою $T=\frac{R^2qt}{\lambda}+T_0$.

7. Серед значень T вибрати найбільше та найменше.

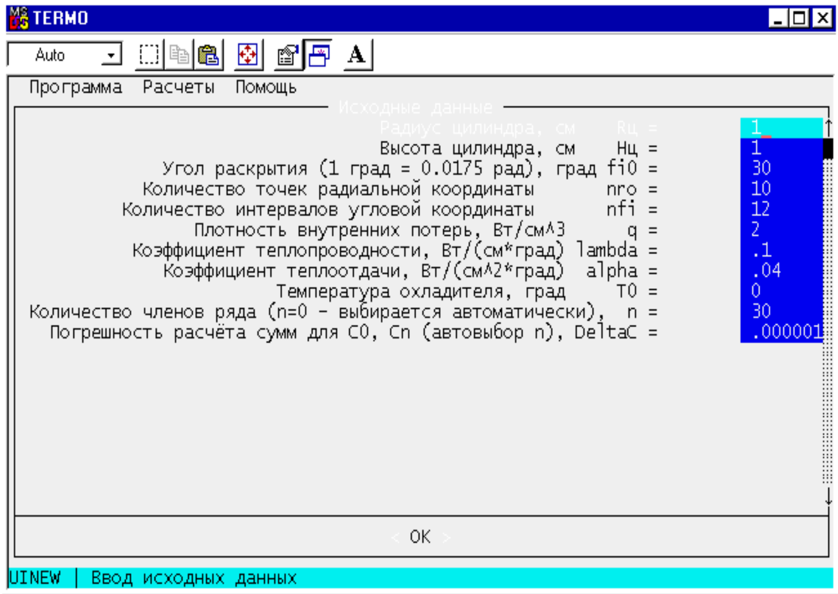
V.Створення програм, що перекладають модель та алгоритм на доступну комп'ютерну мову.

Програма описана алгоритмічною мовою *Basic*.

VI. Проведення обчислювального експерименту.

Підрахуємо значення температури циліндра при різних значеннях φ_0.

На рис. 4 подані результати обчислень при $\varphi_0 = 30$.



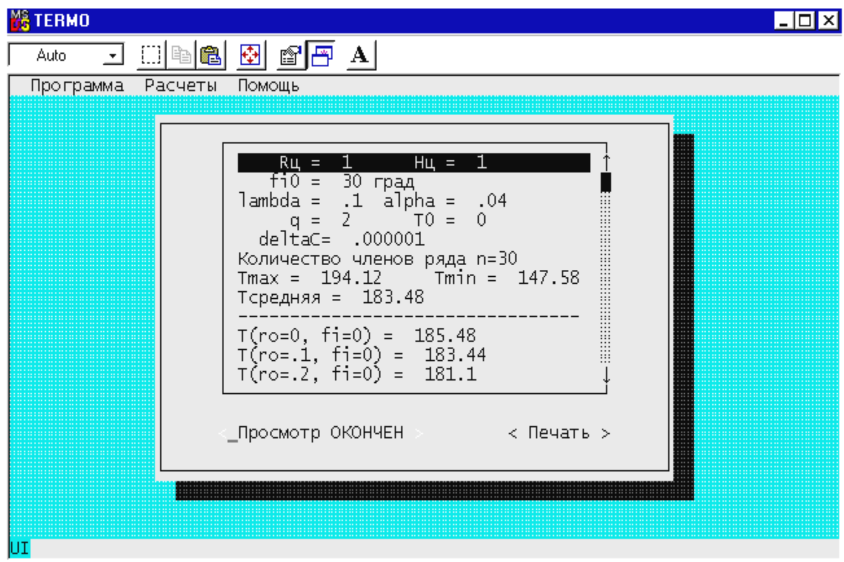


Рис. 4. Обчислення температури циліндра при куті охолодження $\varphi_0 = 30°$.

VII. Аналіз результатів та вдосконалення моделі.

В залежності від величини розкриття зони кута охолодження максимальна та мінімальна температури змінюються наступним чином:

зі збільшенням кута охолодження максимальна температура зменшується, а мінімальна температура збільшується.

Одержані результати корисні для вибору ефективної схеми охолодження при проектуванні електричних машин.

Систематичне застосування математичного моделювання з комп'ютерною підтримкою на практичних заняттях та в науково-дослідній роботі студентів буде сприяти підвищенню якості підготовки педагогічних кадрів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Галузеві стандарти вищої освіти. Математика. — К.: НПУ імені М.П,Драгоманова, 2003. — 83с.
2. *Жалдак М.І.* Комп'ютер на уроках математики. — К.: Техніка, 1997. — 305 с.
3. *Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О.* Вища математика. — К.: Академія, 2002. — 623с.
4. *Гнеденко Б.*В. Математика и математичекое образование в современном мире. — М.: Просвещение, 1985. — 192с.
5. *Самарский А.*А. Математическое моделирование: Идеи, методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2001. — 316с.