М.І. Жалдак, Г.О. Михалін
НПУ ім. М.П. Драгоманова

Елементи теорії міри в структурі професійних знань учителя математики.

1. Теорія міри множини – одна з найважливіших математичних теорій, початки якої закладено вченими сивої давнини, яка розвивалася на протязі тисячоріч і продовжує розвиватися зараз, розширюються межі її застосувань. Як і будь-яка наукова теорія, вона пройшла певні етапи свого розвитку.

1^0. *Етап зародження теорії.* На цьому етапі переважають суб'єктивно-інтуїтивні методи введення основних понять та одержання основних фактів теорії. Сама теорія доступна лише вузькому колу вчених, кожен з яких, як правило, має свій погляд на цю теорію.

2^0. *Етап первинного обгрунтування*. Ще переважає суб'єктивно-інтуїтивне сприйняття основних фактів теорії, проте послідовники засновників теорії роблять перші спроби обґрунтування, а тому і спрощення основних фактів теорії, завдяки чому теорія все більше ґрунтується на об'єктивних істинах і стає доступною для вивчення найближчими учнями вчених, що працюють над розвитком теорії.

3^0. *Етап достатнього обгрунтування.* Обґрунтування та спрощення основних фактів теорії досягає такого рівня, що з'являється можливість вивчення теорії досить широким колом учнів, а не тільки найближчими учнями вчених, що розвивають теорію.

4^0. *Етап остаточного обгрунтування.* Теорія майже повністю позбавляється суб'єктивно-інтуїтивних відтінків. Для математичної теорії характерне створення відповідної аксіоматики. Завдяки найабстрактнішому, найзагальнішому розвиненню теорії значно розширюються межі її застосувань, а також з'являються можливості найпростішого, найдоступнішого подання елементів цієї теорії найширшому колу учнів, включаючи і учнів загальноосвітніх шкіл. Це досягається за рахунок того, що логічно послідовне подання теорії, на відміну від подання її на інтуїтивно–правдоподібному рівні, може бути позбавленим громіздкості і розпливчастості думки, невід'ємним наслідком яких є багатослівність, що аж ніяк не пов'язане із суттю справи.

2. Сучасна теорія міри знаходиться на четвертому етапі розвитку і являє собою струнку аксіоматичну теорію, що має широкі застосування, а елементи цієї теорії цілком доступні не тільки студентам вищих навчальних закладів, а й учням середніх загальноосвітніх шкіл. Основне завдання методистів якраз і полягає у методичній адаптації основних понять теорії та деяких її найпростіших фактів до потреб шкільного курсу математики. Першим кроком у цій методичній роботі є виділення тієї частини теорії, яку доцільно вивчати у тому чи іншому навчальному закладі.

У процесі підготовки учителя математики формуються основи його професійної культури, найважливішими компонентами якої є математична та методична культура. Зокрема, учитель математики повинен володіти найпростішими фактами теорії міри, опанування якими здійснюється на протязі усіх років його навчання.

Вже на першому курсі, подаючи матеріал, пов'язаний з поняттям площі квадровної фігури, довжини спрямлюваної кривої та об'єму кубовної фігури, доцільно сформувати уявлення студентів про те, що на кожну з цих величин можна дивитись, як на функцію, що визначена на певній сукупності Σ підмножин даної множини Ω та набуває невід'ємних значень, включаючи, можливо, і нескінченне $+\infty$.

При цьому сукупність Σ підмножин множини Ω задовольняє умови:

1) Ω є Σ;

2) якщо $A \in \Sigma$, то $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \Sigma$;

3) якщо $A \in \Sigma$ і $B \in \Sigma$, то $A \bigcup B \in \Sigma$,

і називається *алгеброю* підмножин множини Ω, а сама множина Ω називається *одиницею алгебри* Σ.

З умови 3) випливає, що $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma \quad \forall A_i \in \Sigma,\ i \in \overline{1,n},\ \forall n \in N$.

Якщо в умовах 1) – 3) замінити умову 3) загальнішою умовою:

3^*) якщо $A_i \in \Sigma,\ i \in N$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$,

тоді сукупність Σ називається *σ-алгеброю* підмножин множини Ω.

Зауважимо, що з поняттям алгебри та σ-алгебри можна ознайомити студентів вже при вивченні елементарних фактів теорії множин та систематично звертатися до цих понять у подальшому. Ці поняття змістовно ілюструються навіть скінченними множинами Ω, на прикладі яких можна показати, що алгебра (і σ-алгебра) Σ може бути мінімальною: $\Sigma = \{\varnothing, \Omega\}$, максимальною: $\Sigma = \{A : A \subset \Omega\}$, а також відмінною від мінімальної та максимальної (наприклад, якщо $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, то сукупність $\Sigma = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2,3,4,5,6\}\}$ є і алгеброю і σ-алгеброю підмножин множини Ω).

Доцільно постійно мати на увазі внутріпредметні зв'язки та систематично підкреслювати, що багато множин Ω можна розглядати, як простори елементарних подій, пов'язаних з певними випадковими (стохастичними) експериментами, а елементи відповідних σ-алгебр Σ можуть бути так званими випадковими подіями, пов'язаними з даним випадковим експериментом. Це може бути доброю пропедевтикою опанування основами теорії ймовірностей і математичної статистики.

1. Якщо в елементарні факти теорії множин включити матеріал, пов'язаний з кількістю елементів множини (потужностями множин), то доцільно підкреслити, що коли $\Omega = N$, а Σ – максимальна σ-алгебра підмножин множини *N*, то кількість $\mu(A)$ елементів множини $A \in \Sigma$ є одним з прикладів міри, тобто функції $\mu(A)$, $A \in \Sigma$, що задовольняє умови:

1) невід'ємності: $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in \Sigma$;

2) зчисленної адитивності: $\mu(\bigcup\limits_i A_i) = \sum\limits_i \mu(A_i)$ для будь-якої зчисленної кількості множин $A_i \in \Sigma$, що попарно не перетинаються ($A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$).

При цьому $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(\{i\}) = 1$ $\forall i \in N$, $\mu(N) = +\infty$ (точніше в цьому випадку: $+\infty$ – це зчисленна нескінченність), серед множин A_i може бути довільна кількість порожніх, тобто випадок скінченної кількості множин A_i охоплено в умові 2.

Аналогічно дістаємо, що коли $\Omega = R$ (або Ω – довільна континуальна множина), а $\Sigma = \{A \subset \Omega : A -$ скінченна, зчисленна або континуальна множина$\}$, то Σ є σ-алгеброю, а кількість елементів (потужність) $\mu(A)$ множини $A \in \Sigma$ також задовольняє умови невід'ємності та зчисленної адитивності.

Вивчаючи застосування визначеного інтеграла до обчислення площ та об'ємів, доцільно ввести поняття міри Жордана множин з просторів R^2 та R^3, підкресливши, що ця міра $\mu(A)$ визначена на сукупності Σ, що є алгеброю і не є σ-алгеброю, оскільки існують зчисленні обмежені множини у просторах R^2 та R^3, що не є вимірними за Жорданом (не мають міри ні скінченної, ні нескінченної).

Щодо невимірних множин, то, на жаль, переважна більшість майбутніх (і працюючих) учителів математики не в змозі навести прості приклади таких множин, оскільки не володіють поняттям міри. У кращому випадку вони згадують, що існують такі множини, проте структура цих множин досить складна, не кажучи вже про доведення їх невимірності. Змінити цю ситуацію на кращу можна, якщо у процесі вивчення елементів теорії міри широко використовувати прості і виразні приклади, побудовані для випадку скінченної множини Ω і σ-алгебри Σ, що не є максимальною. У свідомості студента повинна визріти істина: *вимірні множини – це елементи алгебри (чи σ-алгебри) Σ, на якій задана міра μ, а якщо $A \notin \Sigma$, то A – невимірна множина відносно міри μ.*

Наприклад, якщо $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\Sigma = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2,3,4,5,6\}\}$, а міра μ визначена рівностями $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(\{2,3,4,5,6\}) = 5$ і $\mu(\Omega) = 6$, то кожен елемент алгебри Σ є прикладом вимірної множини, а якщо $A \notin \Sigma$, наприклад, $A = \{1,2\}$, то *A* – невимірна множина відносно даної міри μ.

Якщо студенти опанують поняття вимірної та невимірної множини на таких простих прикладах, то вони свідомо оперуватимуть і більш складними прикладами вимірних та невимірних множин. Після цього вони легше сприйматимуть ідею продовження міри μ з алгебри Σ на ширшу алгебру (чи σ-алгебру) Σ_1 так, щоб міра μ залишилася без змін на Σ, проте деякі множини, що були невимірними (не належали до Σ), стали вимірними (бо належать до $\Sigma_1 \supset \Sigma$, на якій визначена міра μ_1).

Виявляється, що будь-яку міру μ, визначену на довільній σ-алгебрі Σ підмножин не більш ніж зчисленної множини Ω, можна продовжити на максимальну σ-алгебру Σ_1 підмножин множини Ω, не змінюючи μ на Σ (див., наприклад, [ ]).

У випадку континуальної множини Ω ситуація принципово інша. Існують міри μ, що визначені на деякій σ-алгебрі Σ підмножин множини Ω, які не можна продовжити на максимальну σ-алгебру Σ_1 підмножин множини Ω, не змінюючи μ на Σ (дивись, наприклад, [1] та [2, с. 78]). Отже, у цьому випадку існують "суто невимірні" відносно міри μ підмножини *A* множини Ω, в той час, як у випадку скінченної або зчисленної множини Ω кожну підмножину *A* цієї множини можна зробити вимірною, якщо деяким чином продовжити міру μ, визначену на σ-алгебрі Σ підмножин множини Ω, на максимальну σ-алгебру. У цьому принципова відмінність між дискретною (не більш, ніж зчисленною) та неперервною (континуальною) множинами Ω. Ці випадки особливо важливі для так званої ймовірнісної міри μ, тобто такої міри μ, що додатково задовольняє умову: $\mu(\Omega) = 1$.

4. Вивчення елементів теорії міри продовжується у розділі, присвяченому кратним і криволінійним інтегралам та їх застосуванням. За умов проведення пропедевтичної роботи, про яку йшла мова вище, студенти легко опановують поняття вимірної множини з простору R^n та її міри Жордана, оскільки ніяких принципових труднощів у порівнянні з простором R^2 тут не зустрічається, особливо, коли довести, що множина *E*, яка лежить в елементарному прямокутнику *P*, $E \subset P$, є вимірною за Жорданом тоді і тільки тоді, коли її характеристична функція f_E інтегровна за Ріманом на *P*. При цьому міра Жордана $mesE = \int\limits_P f_E dx$. Доведення цього твердження, а на його основі і доведення усіх властивостей міри Жордана, є досить прозорими і легко сприймаються студентами.

Особливу увагу слід звернути на специфіку випадку простору R^n, $n \geq 2$, пов'язану з мірами, що є довжинами спрямлюваних дуг та площами кривих поверхонь. Важливість відповідного теоретичного матеріалу випливає з того, що багато програмних засобів створюються зокрема і для обчислення таких довжин та площ. При цьому достатнє наближення потрібної довжини часто дістають шляхом заміни дуги вписаною ламаною, зменшуючи ланки якої, збільшують точність результату.

Аналогічно поступають і при обчисленні площі кривої поверхні, в яку вписують многогранну поверхню, площу якої вважають задовільним наближенням площі кривої поверхні, причому тим кращим, чим дрібніші грані многогранної поверхні, вписаної у дану криву поверхню.До 1810 року математики вважали такий спосіб обчислення площі кривої поверхні цілком коректним. Проте німецький математик Г. Шварц на прикладі циліндра показав помилковість такої думки. Враховуючи надзвичайну важливість прикладу Г. Шварца, наведемо його (дивись також [3, с. 78] та [4, с. 248]).

Отже, розглянемо криву поверхню – циліндр з радіусом основи R і висотою h (рис.1).

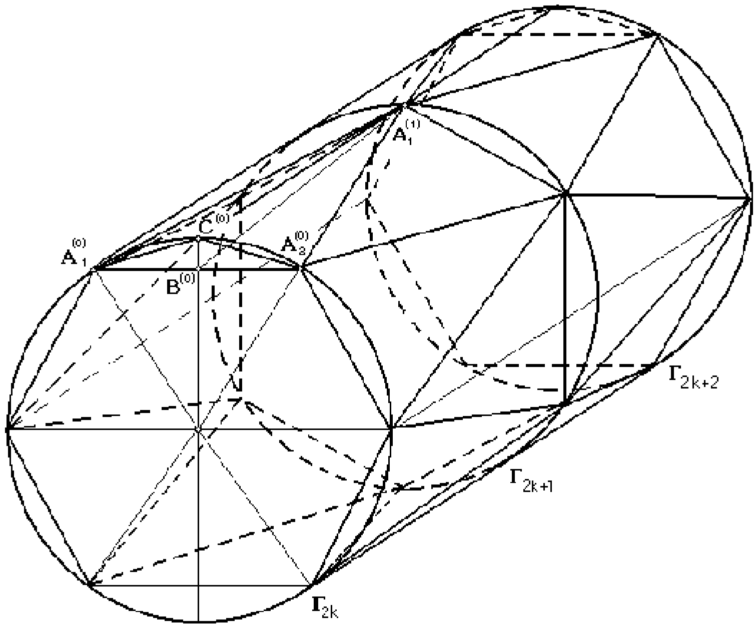

Рис. 1

Поділимо цей циліндр на m маленьких циліндрів висотою $\frac{h}{m}$. Нехай кола Γ_k є межами цих маленьких циліндрів. Впишемо в ці кола правильні многокутники з вершинами відповідно в точках $A_i^{(k)}$, $i\in\overline{1,n}$, $k\in\ \overline{0,m}$ так, щоб дуги $\cup A_i^{(k)}A_{i+1}^{(k)}$, $i\in\overline{1,n-1}$ були однаковими за довжиною, а точки $A_i^{(k+1)}$, $i\in\overline{1,n}$, знаходилися напроти середин дуг $\cup A_i^{(k)}\ A_{i+1}^{k}$, $i\in\overline{1,n}$ (рис. 1).

Сполучимо точки $A_i^{(k+1)}$, $i\in\overline{1,n}$, відрізками прямих з точками $A_i^{(k)}$ і $A_{i+1}^{(k)}$ $i\in\overline{1,n}$ (при цьому точка $A_{n+1}^{(k)}$ співпадає з точкою $A_1^{(k)}$). Дістанемо многогранну поверхню, що вписана у циліндр і складається з $2nm$ трикутників, площа кожного з яких дорівнює $S=\frac{1}{2}\left|A_1^{(0)}A_2^{(0)}\right|\cdot\left|A_1^{(1)}B^{(0)}\right|$ (рис. 1).

Враховуючи, що

$$\left|A_1^{(0)}A_2^{(0)}\right|=2R\sin\frac{\pi}{n},\quad \left|A_1^{(1)}B^{(0)}\right|=\sqrt{(B^{(0)}C^{(0)})^2+(A_1^{(1)}C^{(0)})^2}=$$

$$=\sqrt{\left(R-R\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{h}{m}\right)^2}=\sqrt{R^2 4\sin^4\left(\frac{\pi}{n}\right)+\frac{h^2}{m^2}},$$

дістанемо, що площа S_{mn} многогранної поверхні обчислюється за формулою:

$$S_{mn}=2nm\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2 4\sin^4\left(\frac{\pi}{2n}\right)+\frac{h^2}{m^2}}=$$

$$=2nR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2m^2 4\sin^4\left(\frac{\pi}{2n}\right)+h^2}.$$

Вважаючи, що $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\frac{m}{n^2}=q$, дістанемо, що при $n\to\infty$ $n\sin\frac{\pi}{n}\to\pi$,

$$m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}=\frac{m^2\cdot\pi^4}{2^4\cdot n^4}\left(\frac{\sin\ \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 q^2,$$

а тому

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} S_{mn} = 2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4 R^2}{4}q^2 + h^2}\ .$$

Ця границя істотно залежить від q і тому площа многогранної поверхні може бути довільним числом з проміжку $[2\pi Rh; +\infty)$, а шукана площа повинна бути близькою до числа πRh .

Таким чином, при наближеному обчисленні площі кривої поверхні не всі многогранники, вписані у криву поверхню, дають потрібне наближення площі кривої поверхні.

5. Володіючи загальним поняттям міри множини, учитель математики може (і повинен) викласти матеріал шкільного курсу математики, що стосується довжин кривих, площ фігур, об'ємів тіл, а також ймовірностей випадкових подій, логічно строго і методично доступно для більшості своїх учнів.

Наприклад, поняття площі плоскої фігури можна ввести так.

Площею називають функцію *S*, визначену на сукупності Σ плоских фігур (*квадровних фігур*), що містить у собі усі многокутники та круги, при цьому сукупність фігур Σ і функція *S* задовольняють умови:

1. $S(\varPhi) \geq 0,\ \varPhi \in \Sigma$, тобто площа будь-якої фігури $\varPhi$ сукупності Σ невід'ємна;
2. рівні (конгруентні) фігури мають рівні площі:
$$\varPhi_1 = \varPhi_2 \Rightarrow S(\varPhi_1) = S(\varPhi_2).$$
3. якщо $\varPhi_1 \in \Sigma$ і $\varPhi_2 \in \Sigma$, то $\varPhi_1 \cup \varPhi_2 \in \Sigma$, $\varPhi_1 \setminus \varPhi_2 \in \Sigma$ і $\varPhi_1 \cap \varPhi_2 \in \Sigma$, причому $S(\varPhi_1 \cup \varPhi_2) = S(\varPhi_1) + (\varPhi_2)$, коли $\varPhi_1$ та $\varPhi_2$ не мають спільних внутрішніх точок.

Таким чином фігури, що складаються з однакових квадровних частин, мають однакові площі.

Після введення поняття площі розв'язують питання про її обчислення. Для цього домовляються, як перевіряти, чи є фігура квадровною, тобто належить до Σ чи ні, і як знаходити (обчислювати) площу тієї чи іншої квадровної фігури сукупності Σ, пам'ятаючи, що ці домовленості не повинні суперечити умовам 1)–3) означення площі. Для елементарних фігур сукупності Σ значення їх площ вводиться за означенням. А тому і квадровність елементарних фігур не доводять.

Найчастіше елементарними квадровними фігурами вважають прямокутники (або трикутники), а площа прямокутника (трикутника) за означенням дорівнює добутку його вимірів (півдобутку довжини основи на висоту). Використовуючи цей факт і умову 3, з означення площі легко дістати формули для обчислення площ паралелограмів, трикутників, трапецій і довільних многокутників.

Поширюючи поняття площі на довільні плоскі фігури, вважають що *фігура* $\varPhi$ *є квадровною* (має площу), коли існують многокутники $\varPhi_n^{(1)}$ *і* $\varPhi_n^{(2)}$, $n \in N$, такі, що $\varPhi_n^{(1)} \subset \varPhi \subset \varPhi_n^{(2)}$, $n \in N$, причому $S(\varPhi_n^{(2)}) - S(\varPhi_n^{(1)}) \to 0$, коли $n \to \infty$. Тоді існує спільна границя

$$\lim_{n\to\infty} S(\varPhi_n^{(1)}) = \lim_{n\to\infty} S(\varPhi_n^{(2)}),$$

яку називають *площею* (*мірою Жордана*) фігури $\varPhi$. Квадровність фігури Ф та її площа S(Ф) не залежить від того, якими є многокутники $\varPhi_n^{(1)}$ та $\varPhi_n^{(2)}$, головне, щоб $\varPhi_n^{(1)} \subset \varPhi \subset \varPhi_n^{(2)}$, $n \in N$, і $S(\varPhi_n^{(2)}) - S(\varPhi_n^{(1)}) \to 0$, коли $n \to \infty$. Тому на практиці ці многокутники добирають так, як вважають зручнішим. Зокрема, для круга вважають, що $\varPhi_n^{(1)}$ і $\varPhi_n^{(2)}$ – це правильні *n*-кутники, відповідно вписані в круг та описані навколо нього. Це повинен знати учитель математики, а переважній більшості учнів достатньо знати без доведення, що круг має площу, яку можна знайти за формулою $S = \pi R^2$, де $\pi \approx 3{,}14$, а R – радіус круга.

Аналогічні ідеї можна використовувати при вивченні матеріалу, пов'язаного з об'ємом фігури.

Щодо площ кривих поверхонь: циліндра, конуса, сфери тощо, то у більшості випадків досить навести відповідні формули для обчислення площ цих поверхонь і евристичні міркування, які формують віру у правильність цих формул, але підкреслюючи при цьому, що справжні доведення цих формул існують, проте досить складні.

6. Підсумовуючи сказане, підкреслимо, що сучасному учителю математики необхідно:

1) знати загальне означення міри, вимірної та невимірної множини;
2) вміти наводити прості приклади міри, вимірних та невимірних множин;
3) знати, що введення конкретної міри (довжини, площі, об'єму, ймовірності) полягає часто в означенні елементарних фігур та їх мір, а вже потім в процедурі перевірки, чи є задана фігура вимірною, і якщо так, то і в процедурі обчислення її міри;
4) не видавати правдоподібні міркування за доведення, а краще замість цього сформулювати результат (теорему, формулу тощо) і сказати, що його доведення існує, проте досить складне;
5) бути критичним до навчальних посібників з математики та відповідних педагогічних програмних засобів, оцінюючи їх з позицій сучасних математичних теорій, зокрема, теорії міри;
6) вміти використовувати засоби сучасних інформаційних технологій для проведення чисельних експериментів, їх узагальнення, обгрунтування чи спростування відповідних гіпотез, здогадок;
7) вміти аналізувати разом з учнями всеможливі математичні об'єкти та логічно обґрунтовувати висновки і узагальнення, звертаючись в разі потреби до чисельних експериментів з використанням відповідних математичних моделей, добираючи відповідні приклади і контрприклади, використовуючи аналогії, порівняння, узагальнення різноманітних розрізнених спостережень і фактів.

Це дасть можливість вчителеві навчати дітей на достатньо високому сучасному науково–методичному рівні, з дотриманням дидактичних принципів науковості змісту навчання, свідомої навчально–пізнавальної діяльності та інших, а також кваліфіковано добирати навчальний матеріал, систему задач і вправ, високо професійне науково–методичне забезпечення навчального процесу, засоби, методи, організаційні форми, впевнено орієнтуватися в потоці всеможливих електронних і традиційних паперових підручників і навчальних посібників та добирати серед них справді педагогічно доцільні, науково і методично виважені і обгрунтовані, які забезпечують формування у дітей наукового світогляду, основ сучасних наукових теорій, зокрема математичних, сучасного розуміння законів природи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Деякі властивості ймовірнісних моделей стохастичних експериментів. //Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник наукових праць. Випуск 3.- К.: Комп'ютер в школі та сім’ї. - 2001. с. 49-68.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974. - 480 с.
3. Михалін Г.О. Елементи теорії інтеграла та міри.-К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2000.- 266с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.III. - М.: Наука, 1966.- 656с.